引文格式:黄谟涛,邓凯亮,欧阳永忠,等.球外部高程异常计算模型改化与数值检验[J].武汉大学学报(信息科学版),2026,51(7):1360-1371.DOI:10.13203/j.whugis20250121

Citation:HUANG Motao,DENG Kailiang,OUYANG Yongzhong,et al.Refinement and Numerical Validation of the Computational Model for External Height Anomaly[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2026,51(7):1360-1371.DOI:10.13203/j.whugis20250121

球外部高程异常计算模型改化与数值检验

黄谟涛[1,2,3,4] 邓凯亮[5] 欧阳永忠[1,2,3,4] 董 超[3]
陆秀平[1,3,4] 汤民强[3] 洪黎丹[1,3,4]

1 福建理工大学智慧海洋科学技术学院,福建 福州,350118
2 中国船舶航海保障技术实验室,天津,300131
3 自然资源部海洋环境探测技术与应用重点实验室,广东 广州,510300
4 海洋智能装备福建省高校重点实验室,福建 福州,350118
5 中南大学地球科学与信息物理学院,湖南 长沙,410083

摘 要:通过地形调整和重力向下解析延拓方法求解地球表面边值问题,最终都要归结为含地心向径因子核函数的球外部扰动位泛函全球积分模型解算问题,当计算点无限接近球面数据网格点时,此类计算模型的积分核函数会发生奇异,导致计算结果失效。针对此问题,分别提出了基于中心网格数据区块分离法和基于计算点网格数据移去恢复法的两种去除积分核函数奇异性解决方案,同时提出了全球积分模型向局域数值积分模型转换的实用性改化方案,解决了球外部超低空高程异常的精密解算问题。分析研究了数据观测误差对高程异常计算结果的影响特性及制衡关系,辨别了影响球外部高程异常计算精度的主要干扰源。选择珠穆朗玛峰山区作为实验区,利用超高阶位模型EGM2008对核函数奇异性解决方案和计算模型实用性改化方案进行了数值计算验证,证实所提方案是可行有效的,即使在重力场变化极为剧烈的珠穆朗玛峰山区,经改化后的严密计算模型也能取得优于1 cm的内符合精度。

关键词:球外部高程异常;含地心向径因子核函数;模型改化;奇异积分;误差分析;数值验证

中图分类号:P229 **文献标识码**:A **收稿日期**:2025-05-08

DOI:10.13203/j.whugis20250121 **文章编号**:1671-8860(2026)07-1360-12

Refinement and Numerical Validation of the Computational Model for External Height Anomaly

HUANG Motao[1,2,3,4] *DENG Kailiang*[5] *OUYANG Yongzhong*[1,2,3,4] *DONG Chao*[3]
LU Xiuping[1,3,4] *TANG Minqiang*[3] *HONG Lidan*[1,3,4]

1 School of Smart Marine Science and Technology, Fujian University of Technology, Fuzhou 350118, China
2 Laboratory of Science and Technology on Marine Navigation and Control, China State Shipbuilding Corporation, Tianjin 300131, China
3 Key Laboratory of Marine Environmental Survey Technology and Application, Ministry of Natural Resources, Guangzhou 510300, China
4 Key Laboratory of Marine Smart Equipment, Fujian Province University, Fuzhou 350118, China
5 School of Geosciences and Info-Physics, Central South University, Changsha 410083, China

Abstract: **Objectives**: In solving the Earth's surface boundary value problem through terrain adjustment and downward analytical continuation of gravity data, the process ultimately reduces to the computation of a global integral model for the disturbance potential functional in the external space of the Earth, which contains a kernel function with geocentric radius factor. When the computation point approaches infinitely close to the spherical grid nodes, singularities occur in the integral kernel functions of such computational

基金项目:国家自然科学基金(42174013,42274015);中国船舶航海保障技术实验室开放基金(2024010201);自然资源部海洋环境探测技术与应用重点实验室开放基金(MESTA-2023-A002);2024福建省科技重大专项(科教联合)项目(2024HZ026009);福建理工大学引进科研教学团队资金(GY-24015)。

第一作者:黄谟涛,教授,主要从事海洋重力场理论方法及应用技术研究。Huangmt@163.com

通信作者:欧阳永忠,博士,教授。562273857@qq.com

models, leading to failure in calculation results. **Methods:** To address this issue, two distinct solutions are proposed to eliminate the singularities in the integral kernel functions: one is called central grid data block separation method, and the other is called computation point grid data remove-restore technique. Concurrently, a practical modification scheme is developed for converting global integral models into localized numerical integration models, resolving the challenge of precise calculation of ultra-low-altitude height anomalies in the Earth's external space. The influence characteristics and equilibrium relationships between observational data errors and height anomaly computation results are systematically analyzed, identifying the primary interference sources affecting the accuracy of external height anomaly calculations. **Results:** The Mount Everest region is selected as a test area, where the singularity elimination solutions and model modification schemes are numerically validated using the ultra-high-degree geopotential model EGM2008. The results confirm the feasibility and effectiveness of the proposed methodologies. Even in the Mount Everest region where gravity field variations are extremely intense, the refined rigorous computational model can achieve an internal consistency accuracy better than 1 cm. **Conclusions:** The results show that reducing systematic bias in data observation and implementing kernel truncation modification measures are key to improving the accuracy of external height anomaly calculations. And using the modification model recommended in this paper for calculating external height anomalies can meet the requirements of constructing high-accuracy and high-resolution numerical models of height anomalies today.

Key words: external height anomaly; a kernel function with geocentric radius factor; model refinement; singular integral; error analysis; numerical validation

依据现代Molodensky边值问题理论框架[1],高程异常既可定义为似地球表面至真实地球表面的高度,也可定义为平均椭球体表面至似大地水准面的高度[2-3]。高程异常对应正常高高程系统,是地面某点大地高与正常高的互差,当已知地面测点的大地高和高程异常时,可反求该测点的正常高。中国一直沿用正常高系统,近期随着地球空间信息在国家经济和军事各领域应用价值的日趋凸显,以及高精度全球定位技术的推广应用,精确求定高程异常(也就是似大地水准面高)数值模型已成为中国实现高程基准现代化的关键技术环节和核心基础设施建设目标[4]。求定高程异常一般采用直接法和间接法两种技术途径:利用传统天文水准、天文重力水准、现代全球导航卫星系统(global navigation satellite system,GNSS)水准确定高程异常的方法均属于直接法;间接法则是指依据地球表面一种或多种重力观测数据源,建立关于扰动重力位的大地测量边值问题,通过求解边值问题确定地面扰动重力位解析模型,进而求定高程异常数值模型。不论是从经济成本还是从计算成果分辨率和精度水平考虑,基于地面重力观测数据边值问题解的间接法都是目前国内外求定高程异常的首选方法[5-6]。

求解地面扰动位(可直接转换为高程异常)大地边值问题的理论支撑是著名的Molodensky现代边值理论,依据该理论方法可精密求定地球表面点位的高程异常,与其相对应的线性化Molodensky边值问题级数解的零阶项等同于经典的Stokes积分,其余高阶项均为与地形起伏相关的效应改正。实践中大多都采用Molodensky级数解的零阶项(Stokes积分)加一阶项(考虑地形效应的G_1项积分)进行高程异常参数计算,其几何意义是:首先将地面重力异常延拓归算到海平面(近似为球面),然后通过Stokes积分完成海平面高程异常的计算,最后将海平面高程异常向上延拓归算到地球表面[5,7]。由于Molodensky边值问题的近似解在形式上与经典Stokes积分完全相同,其中涉及的积分核函数还是传统的Stokes函数$S(\psi)$,其相对应的计算模型改化问题已经得到比较深入的研究,诸如参考场的移去-恢复、远区效应改正、核函数截断改化、奇异积分等[8]。因此,关于Molodensky边值问题解的高程异常计算模型改化问题,不需作更多的评述和讨论。但需要指出的是,关于高程异常计算,除了可采用主流的Molodensky边值理论以外,还可采用基于位场等效源原理的虚拟界面边值理论,Bjerhammar边值理论是此类虚拟界面边值理论的典型代表。为了避开Molodensky边值理论涉及的不规则地形面及其斜向导数等复杂数学问题,Bjerhammar提出将Molodensky边值问题等价转换为一个简单的虚拟球面边值问题[9]。该理

论的解算思路为:将分布于地球表面上的已知离散化重力异常向下调和延拓到一个完全处于地球内部的所谓Bjerhammar球(简称B氏球)面上,在该球面上构造一个虚拟的重力异常场,并强制该虚拟场在地球表面及其外部空间产生的位与地球表面已知观测重力异常场产生的位一致,最终利用广义Stokes核函数$S(r,\psi)$(含地心向径r因子)的再生性,以比Molodensky级数解简单得多的Stokes-Pizzeti积分公式给出地球表面边值问题的解。除Bjerhammar方法外,近期国内外学者也在研究源自地形质量调整思路和Helmert第二压缩补偿原理的边值解算问题,并将其定义为Stokes-Helmert边值问题[6,10-11]。解算此类边值问题的基本思路是:首先将大地水准面外部地形质量垂直向下压缩到大地水准面上,完成地形调整对地面重力异常的直接影响和残余地形位间接影响计算,并将各观测量和影响改正量向下解析延拓到大地水准面上,形成Helmert虚拟重力异常场,然后同样利用广义Stokes核函数$S(r,\psi)$的再生性,以Stokes-Pizzeti积分给出地球表面边值问题解。由Bjerhammar边值理论和Stokes-Helmert边值理论给出的地面高程异常计算模型具有相同的形式和特点,实际上它们均已转换为含地心向径因子核函数的球外部重力异常场赋值计算问题[12],当计算点与数据网格点重合并无限接近球面时,此类计算模型的积分核函数都会出现不同程度的奇异性,需要对其进行改化处理[13-15]。高程异常积分核函数的奇异性虽然不如外部重力异常、扰动重力及径向导数计算积分公式的核函数那么严重,但对于厘米级精度高程基准确定要求,仍有必要对其计算模型进行实用性改化和奇异性处理。

1 计算模型分析与改化

1.1 计算模型通式

本文以Bjerhammar边值问题和Stokes-Helmert边值问题为指向,统一给出计算球外部高程异常参数的通用积分公式,并以此为基础开展积分核函数奇异性分析研究和计算模型实用性改化。

根据Bjerhammar边值理论[5,16],地面(B氏球外部)高程异常ζ的计算模型为:

$$\zeta=\frac{R_b}{4\pi\gamma}\iint_\sigma \Delta g_b S(r,\psi)\mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

式中,γ为平均正常重力;R_b为B氏球半径;Δg_b为B氏球面上的虚拟重力异常;r为计算点地心向径;σ为单位球面;ψ为计算点至积分面元之间的球面角距;$S(r,\psi)$称为广义Stokes函数,其计算式为:

$$S(r,\psi)=\frac{2R_b}{l}+\frac{R_b}{r}-\frac{3R_b l}{r^2}-\frac{5R_b^2\cos\psi}{r^2}-\frac{3R_b^2}{r^2}\cos\psi\ln\left(\frac{r+l-R_b\cos\psi}{2r}\right) \tag{2}$$

$S(r,\psi)$的级数表达式为:

$$S(r,\psi)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}\left(\frac{R_b}{r}\right)^{(n+1)}P_n(\cos\psi) \tag{3}$$

式中,l为计算点至球面流动点之间的距离;$P_n(\cos\psi)$为n阶勒让德函数。式(1)通常称为广义Stokes积分,也称Stokes-Pizzeti积分。根据位场等效源原理,Bjerhammar理论强制式(1)中的虚拟重力异常场Δg_b在地球表面及其外部空间产生的位与地面观测重力异常场Δg产生的位一致,该约束条件可用函数关系表示为如下的Poisson积分公式:

$$\Delta g=\frac{R_b^2}{4\pi r}\iint_\sigma\frac{(r^2-R_b^2)}{l^3}\Delta g_b\mathrm{d}\sigma \tag{4}$$

式中,Δg为已知量;Δg_b为未知量。因此只能通过迭代算法对式(4)所示的积分方程进行求解,具体求解过程不再详述。

根据Stokes-Helmert边值理论[6,17],地面高程异常ζ的计算模型为:

$$\zeta=\frac{R}{4\pi\gamma}\iint_\sigma\Delta g^{h*}S(r,\psi)\mathrm{d}\sigma+\delta\zeta \tag{5}$$

式中,R为地球平均半径;Δg^{h*}为大地水准面上的Helmert重力异常,其计算式为:

$$\Delta g^{h*}=\Delta g^{*}+\delta A^{*}+\delta S \tag{6}$$

式中,Δg^{*}和δA^{*}分别为已知地面重力异常Δg和大地水准面外部地形质量对Δg直接影响量δA,向下延拓到大地水准面的计算值;δS代表外部地形质量压缩调整对地面观测重力异常的次间接影响。式(5)中的$\delta\zeta$为地形压缩调整对高程异常的间接影响,其计算式为:

$$\delta\zeta=\frac{\delta V(P)}{\gamma} \tag{7}$$

式中,$\delta V(P)$为经Helmert地形压缩调整后的残余地形位。式(6)和式(7)的实现过程可参见文献[6,17]。

由式(1)和式(5)可以看出,如果暂不考虑式(5)右端的残余地形位改正项,那么,可将基于

Bjerhammar边值理论和Stokes-Helmert边值理论的球外部高程异常计算模型统一写为如下通式:

$$\zeta=\frac{R_s}{4\pi\gamma}\iint_\sigma \Delta g_s S(r,\psi)\mathrm{d}\sigma \tag{8}$$

式中,Δg_s为经归算后得到的球面重力异常,为简便起见,下文统一用Δg表示;R_s为相对应的球半径,为简便起见,下文统一用R表示。

1.2　计算模型奇异性的两种处理方案

1.2.1　第一种处理方案

由式(2)得知,当计算点与数据网格平面位置重合且计算点高度无限接近球面时(Stokes-Helmert边值问题解算会出现这种情况),计算模型通式(8)中的核函数$S(r,\psi)$将发生奇异,致使无法完成超低空高程异常的精准计算。实际上,采用经典Stokes积分公式计算大地水准面高(对应于式(8)中$h=0$的情形)时,也会遇到计算点与数据网格点重合带来的Stokes函数$S(\psi)$奇异性问题,解决此类问题的传统做法是[7]:将与计算点重合的中心数据网格分离出来进行单独处理,当数据网格的半径取为s_0时,中心数据网格对大地水准面高的影响N_{p0}可近似表示为:

$$N_{p0}=\frac{s_0}{\gamma}\Delta g_p \tag{9}$$

式中,Δg_p为中心数据网格的重力异常。

显然,积分式(8)遇到的核函数奇异性问题可采用上述同样的思路来处理。将计算点所在数据网格进行单独处理,考虑到该数据网格面积较小,可将其作平面近似处理,采用极坐标系(s,α)表示形式,可近似取值为$l^2\approx l_0^2+h^2\approx s^2+h^2$,$R^2\mathrm{d}\sigma\approx s\mathrm{d}s\mathrm{d}\alpha$,其中$l_0=2R\sin\frac{\psi}{2}$,$r=R+h$,$h$为计算点高度。此时,只需要考虑积分核函数$S(r,\psi)$的主项,即可近似取:

$$S(r,\psi)\approx\frac{2R}{l}\approx\frac{2R}{\sqrt{s^2+h^2}} \tag{10}$$

设计算点所在数据网格重力异常Δg_p对高度h处的高程异常计算值的贡献为ζ_{p0},则有:

$$\zeta_{p0}=\frac{1}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_0^{s_0}\Delta g_p\frac{2}{\sqrt{s^2+h^2}}s\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{\gamma}\Delta g_p\left(\sqrt{s_0^2+h^2}-h\right) \tag{11}$$

当$h=0$(即$r=R$)时,式(11)简化为:

$$\zeta_{p0}=\frac{s_0}{\gamma}\Delta g_p \tag{12}$$

式(12)与文献[7]的推导结果(即式(9))完全一致。本文把上述处理核函数奇异性过程称为基于中心网格数据区块分离法的去除积分核函数奇异性解决方案。采用此方案需要注意的是,随着延拓计算高度的增大,由积分核函数平面近似处理(见式(10))带来的误差也会逐步增大,因此须将该方案应用范围限定在超低空高度段,譬如在1 km高度以下。而在1 km以上高度,核函数已经不再存在奇异性问题,原积分模型可恢复正常流程完成各高度点的数值计算,也就是说,上述处理方案足以保证获得全高度段稳定可靠的高程异常解算结果。实际计算时,s_0的计算公式为:

$$s_0=\frac{R\sqrt{\Delta\sigma_p}}{\sqrt{\pi}} \tag{13}$$

$$\Delta\sigma_p=\Delta\varphi\Delta\lambda\cos\varphi_p=\left(\frac{\pi}{180\times60}\right)^2\times\Delta\varphi'\times\Delta\lambda'\times\cos\varphi_p \tag{14}$$

式中,φ_p为计算点大地纬度;$\Delta\lambda$、$\Delta\varphi$分别为数据经度、纬度网格间距。

1.2.2　第二种处理方案

解决积分核函数奇异性问题除了可采用上述方法以外,还可借鉴文献[7]处理地球外部重力异常及谐函数径向导数计算模型奇异性的研究思路,设计如下更为严密的去除积分核函数奇异性解决方案。

考虑到地面实测数据覆盖范围的局限性,人们在实施地球重力扰动位泛函全球积分模型计算时,通常都将全球积分域划分为近区和远区两部分,近区部分采用实测重力异常作为输入量,通过数值积分方式进行计算,远区则通过超高阶全球重力位模型进行计算。设近区部分的积分半径取为ψ_0,则该部分对球外高程异常的贡献量可表示为:

$$\zeta_{\psi_0}=\frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_0^{\psi_0}\Delta g S(r,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\alpha \tag{15}$$

为了减弱积分核函数奇异性影响,可对式(15)作如下移去恢复变换:

$$\zeta_{\psi_0}=\frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_0^{\psi_0}(\Delta g-\Delta g_p)S(r,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\alpha+\frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_0^{\psi_0}\Delta g_p S(r,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\alpha \tag{16}$$

顾及

$$\frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_0^{\psi_0}S(r,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\alpha=\frac{R}{2\gamma}I_{\psi_0} \tag{17}$$

则有:

$$\zeta_{\psi_0}=\frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_0^{\psi_0}(\Delta g-\Delta g_p)S(r,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\alpha+\frac{R}{2\gamma}\Delta g_p I_{\psi_0} \tag{18}$$

式中,

$$\begin{aligned}I_{\psi_0}=&\int_0^{\psi_0}S(r,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi=\\&\frac{1}{16r^4R}(-8r^3(r-R)+16r^3R-24r^2R(r-R)-14r^2R^2+8r^3l_{\psi_0}+\\&8r^2R\cos\psi_0(-2r+3l_{\psi_0})-12r^2R^2\ln 2+r^4\ln 64+2r^2R^2\ln 64+\\&R^4\ln 64+6(r^2-R^2)^2\ln\left(\frac{2r-2R}{r}\right)-6(r^2-R^2)^2\ln(2r(2r-2R))-\\&2r^2R^2\cos(2\psi_0)(-7+\ln 64-6\ln\left(\frac{r-R\cos\psi_0+l_{\psi_0}}{r}\right))-\\&6r^4\ln\left(\frac{r-R\cos\psi_0+l_{\psi_0}}{r}\right)-6R^4\ln\left(\frac{r-R\cos\psi_0+l_{\psi_0}}{r}\right)+\\&6r^4\ln(r(r-R\cos\psi_0+l_{\psi_0}))-12r^2R^2\ln(r(r-R\cos\psi_0+l_{\psi_0}))+\\&6R^4\ln(r(r-R\cos\psi_0+l_{\psi_0})))\end{aligned} \tag{19}$$

式中,$l_{\psi_0}=\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\psi_0}$。

在式(18)等号右端的积分式中,当r趋近于R,ψ趋近于0时,积分核函数出现奇异,但由于此时存在$(\Delta g-\Delta g_p)$趋近于0,故核函数的奇异点被中和了[7],也就实现了消除积分奇异性的目的。本文把上述过程称为基于计算点网格重力异常移去-恢复法的去除积分核函数奇异性解决方案。

1.3 计算模型实用性改化处理

如前所述,实际计算时需要将高程异常计算模型的积分域划分为近区和远区,这是计算模型实用性改化内容的一部分,远区影响也称为远区效应,一般采用超高阶全球重力位模型进行计算,其计算式为[17]:

$$\begin{aligned}\zeta_{q(\pi-\psi_0)}=&\frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_{\psi_0}^{\pi}\Delta gS(r,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\alpha=\\&\frac{GM}{2\gamma r}\sum_{n=N+1}^{L}(n-1)Q_n^{\zeta}(r,\psi_0)T_n(\varphi,\lambda)\end{aligned} \tag{20}$$

式中,$\zeta_{q(\pi-\psi_0)}$为高程异常远区效应;G、M分别为万有引力常数、地球质量;N为引入位模型参考场的最高阶数;L为超高阶重力位模型的最高阶数;其他参数的计算式如下:

$$Q_n^{\zeta}(r,\psi_0)=\sum_{m=N+1}^{L}\frac{2m+1}{m-1}\left(\frac{R}{r}\right)^{m+1}R_{nm}(\psi_0) \tag{21}$$

$$R_{nm}(\psi_0)=\int_{\psi_0}^{\pi}P_n(\cos\psi)P_m(\cos\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi \tag{22}$$

$$\begin{aligned}T_n(\varphi,\lambda)=&\sum_{m=0}^{n}(\bar{C}_{nm}^{*}\cos(m\lambda)+\\&\bar{S}_{nm}\sin(m\lambda))\bar{P}_{nm}(\sin\varphi)\end{aligned} \tag{23}$$

式中,$P_n(\cos\psi)$为勒让德函数;$\bar{P}_{nm}(\sin\varphi)$为完全规格化缔合勒让德函数;$\bar{C}_{nm}^{*}$、$\bar{S}_{nm}$为完全规格化扰动位系数。

实际上,引入位模型参考场也是计算模型实用性改化内容的一部分,其目的是为了增强全球位模型对高程异常长波信号的控制作用,同时也是降低数据覆盖域需求的需要。这一步骤通常称为基于地球重力位模型的移去-恢复技术。此外,在引入位模型参考场以后,还需要考虑重力异常输入量与积分核函数的频谱匹配问题,以减弱重力异常低频观测误差对高程异常计算结果的影响。这一步骤主要涉及积分核函数的截断优化问题,有多种形式的核函数改化模型可供选择[18],但应用中一般推荐采用形式相对简单的Wong-Gore(WG)改化核函数[19],即只需在原核函数基础上截断掉与位模型参考场相同阶数的相对应核函数球谐展开式,广义Stokes截断核函数$S^{\mathrm{WG}}(r,\psi)$的计算式为:

$$S^{\mathrm{WG}}(r,\psi)=S(r,\psi)-\sum_{n=2}^{N}\frac{2n+1}{n-1}\left(\frac{R}{r}\right)^{(n+1)}P_n(\cos\psi) \tag{24}$$

采用上述截断核函数以后,计算点所在数据网格重力异常的贡献量ζ_{p0}计算式(11)应改为:

$$\zeta_{p0}=\frac{R}{2\gamma}(\Delta g_p-\Delta g_{R\mathrm{pref}})\left[\frac{2}{R}(\sqrt{s_0^2+h^2}-h)-\sum_{n=2}^{N}\frac{2n+1}{n-1}\left(\frac{R}{r}\right)^{(n+1)}R_n(s_0)\right] \tag{25}$$

$$R_n(s_0)=\int_0^{s_0}P_n(\cos\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi=-\frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}(\cos s_0)-P_{n-1}(\cos s_0)\right] \tag{26}$$

此时,积分近区对高程异常贡献量的计算式　(18)也应改写为:

$$\zeta_{\psi_0}=\frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_0^{\psi_0}(\Delta g-\Delta g_p)S^{\mathrm{WG}}(r,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\alpha+\frac{R}{2\gamma}\Delta g_p J_{\psi_0} \tag{27}$$

$$J_{\psi_0}=\frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_0^{\psi_0}S^{\mathrm{WG}}(r,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\alpha=$$
$$\frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_0^{\psi_0}\left[S(r,\psi)-\sum_{n=2}^{N}\frac{2n+1}{n-1}\left(\frac{R}{r}\right)^{(n+1)}P_n(\cos\psi)\right]\sin\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\alpha=$$
$$\frac{R}{2\gamma}\left[I_{\psi_0}-\sum_{n=2}^{N}\frac{2n+1}{n-1}\left(\frac{R}{r}\right)^{(n+1)}R_n(\psi_0)\right] \tag{28}$$

$$R_n(\psi_0)=\int_0^{\psi_0}P_n(\cos\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi=-\frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}(\cos\psi_0)-P_{n-1}(\cos\psi_0)\right] \tag{29}$$

综合计算模型奇异性处理和实用性改化方　案,可得式(25)、式(27)对应的高程异常改化模型:

$$\zeta=\zeta_{\mathrm{pref}}+\frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_{s_0}^{\psi_0}(\Delta g-\Delta g_{\mathrm{ref}})S^{\mathrm{WG}}(r,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\alpha+\zeta_{q(\pi-\psi_0)}+\zeta_{p0} \tag{30}$$

$$\zeta=\zeta_{\mathrm{pref}}+\frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_0^{\psi_0}(\Delta g-\Delta g_p-\Delta g_{\mathrm{ref}}+\Delta g_{\mathrm{pref}})S^{\mathrm{WG}}(r,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\alpha+\zeta_{q(\pi-\psi_0)}+(\Delta g_p-\Delta g_{\mathrm{pref}})J_{\psi_0} \tag{31}$$

式中,Δg_{ref}、Δg_{pref}分别为由参考场位模型确定的球面流动点、计算点(球面投影点)重力异常,两　者计算式相同;ζ_{pref}为由参考场位模型确定的球外部计算高度处的高程异常,其计算式分别为[20]:

$$\Delta g_{\mathrm{ref}}=\frac{GM}{R^2}\sum_{n=2}^{N}(n-1)\sum_{m=0}^{n}(\bar{C}_{nm}^{*}\cos(m\lambda)+\bar{S}_{nm}\sin(m\lambda))\bar{P}_{nm}(\sin\varphi) \tag{32}$$

$$\zeta_{\mathrm{pref}}=\frac{GM}{r\gamma}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{R}{r}\right)^{n}\sum_{m=0}^{n}(\bar{C}_{nm}^{*}\cos(m\lambda)+\bar{S}_{nm}\sin(m\lambda))\bar{P}_{nm}(\sin\varphi) \tag{33}$$

2　数据观测误差影响分析与估计

由式(28)和式(29)得知,球外部高程异常计算误差主要由模型改化误差和数据传播误差两部分组成,模型改化误差主要包括数值积分离散化误差、远区效应截断误差和数据分辨率截断误差,数据传播误差主要包括使用位模型参考场移去-恢复技术引入的位系数误差和数据观测噪声传播误差。考虑到影响高程异常计算精度的因素较多,影响规律也复杂多变,国内外学者已经为此开展了多方面的专题研究[20],本文不再对其作深入讨论,仅就数据观测噪声对高程异常计算精度的影响作定量估计和分析。

以球外部高程异常计算式(8)为依据,只考虑核函数截断改化作用,当已知球面重力异常以经纬网格方式表示时,积分近区对高程异常贡献量的两种离散化数值积分形式分别用$\zeta_{\psi_0}^{(1)}$、$\zeta_{\psi_0}^{(2)}$表示:

$$\zeta_{\psi_0}^{(1)}=\frac{R}{4\pi\gamma}\sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{M_2}\Delta g_{ij}S(r_p,\psi_{pij})\Delta\sigma_{ij} \tag{34}$$

$$\zeta_{\psi_0}^{(2)}=\frac{R}{4\pi\gamma}\sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{M_2}\Delta g_{ij}S^{\mathrm{WG}}(r_p,\psi_{pij})\Delta\sigma_{ij} \tag{35}$$

式中,M_1、M_2分别为数据覆盖域纬度、经度方向的数据网格个数;Δg_{ij}为与网格(i,j)相对应的球面重力异常;积分面积元$\Delta\sigma_{ij}$的计算式为式(14)。

假设网格平均重力异常为等精度观测量且相互独立,则根据误差传播律,可得球面重力异常随机噪声对两种形式的高程异常传播影响估计式$m_{\zeta_{\psi_0}^{(1)}}^2$、$m_{\zeta_{\psi_0}^{(2)}}^2$分别为:

$$m_{\zeta_{\psi_0}^{(1)}}^2=\left(\frac{R}{4\pi\gamma}\right)^2 m_{\Delta g}^2\sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{M_2}\left(S(r_p,\psi_{pij})\Delta\sigma_{ij}\right)^2 \tag{36}$$

$$m_{\zeta_{\psi_0}^{(2)}}^2=\left(\frac{R}{4\pi\gamma}\right)^2 m_{\Delta g}^2\sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{M_2}\left(S^{\mathrm{WG}}(r_p,\psi_{pij})\Delta\sigma_{ij}\right)^2 \quad (37)$$

式中,$m_{\Delta g}$为球面网格平均重力异常的中误差;$m_{\zeta_{\psi_0}}$为计算高度h处的高程异常中误差。

以$P(\varphi=40°\mathrm{N},\lambda=120°\mathrm{E})$为计算点,以该点为中心,选择40°×40°为数据覆盖范围,以2′×2′为数据网格,同时考虑到在当前技术条件下,重力异常网格数据随机误差范围一般在1~5 mGal,系统性偏差在0.1~1 mGal,据此,分别取$m_{\Delta g}$=1 mGal、3 mGal、5 mGal,按式(36)和式(37)依次计算不同高度点的$m_{\zeta_{\psi_0}^{(1)}}$和$m_{\zeta_{\psi_0}^{(2)}}$值,具体数值结果见表1。为了便于比较,表1给出了对应于核函数截断阶数分别取为N=36和N=360时的$m_{\zeta_{\psi_0}^{(2)}}$计算结果,分别记为$m_{\zeta_{\psi_0}^{(2\text{-}1)}}$、$m_{\zeta_{\psi_0}^{(2\text{-}2)}}$。

表1 重力异常随机噪声对高程异常计算精度的影响/cm

Table 1 Effect of Gravity Anomaly Noise on Height Anomaly Accuracy/cm

计算高度/km	$m_{\zeta_{\psi_0}^{(1)}}$			$m_{\zeta_{\psi_0}^{(2\text{-}1)}}$			$m_{\zeta_{\psi_0}^{(2\text{-}2)}}$		
	$m_{\Delta g}$= 1 mGal	$m_{\Delta g}$= 3 mGal	$m_{\Delta g}$= 5 mGal	$m_{\Delta g}$= 1 mGal	$m_{\Delta g}$= 3 mGal	$m_{\Delta g}$= 5 mGal	$m_{\Delta g}$= 1 mGal	$m_{\Delta g}$= 3 mGal	$m_{\Delta g}$= 5 mGal
0	0.42	1.27	2.12	0.28	0.83	1.38	0.18	0.53	0.89
0.01	0.42	1.27	2.12	0.28	0.83	1.38	0.18	0.53	0.89
0.05	0.42	1.27	2.12	0.28	0.83	1.38	0.18	0.53	0.89
0.1	0.42	1.27	2.12	0.28	0.83	1.38	0.18	0.53	0.89
0.3	0.42	1.27	2.12	0.28	0.83	1.38	0.18	0.53	0.88
1	0.42	1.26	2.09	0.27	0.81	1.35	0.17	0.50	0.84
3	0.40	1.20	2.00	0.24	0.72	1.20	0.13	0.38	0.64
5	0.39	1.16	1.94	0.22	0.66	1.10	0.10	0.30	0.50
10	0.37	1.11	1.84	0.19	0.56	0.94	0.06	0.18	0.30

由表1估算结果可以看出,不论是哪一种形式的计算模型,重力异常随机噪声对高程异常计算精度的影响均随噪声量值的增大而增大,随计算高度的增大而减小,这样的结果完全符合误差影响随高度升高而衰减的频谱特征分析预期。表1所列数值同时说明,对积分核函数进行截断改化处理,有利于减弱重力异常随机噪声对高程异常计算精度的影响,核函数截断阶数越高,核函数改化对抑制随机噪声的作用越显著。但这并不能说明核函数截断阶数越高,计算效果就越好,因为核函数截断阶数取值一般都保持与位模型参考场阶数基本一致,选取了较高的核函数截断阶数,就意味着选取了较高阶数的参考场,也就意味着增强了位模型的低频控制作用,但也增加了更多位模型系数误差的影响。因此,如何平衡数据误差和位系数误差两类干扰源的影响才是问题的关键。这方面的内容已经超出本文的研究范畴,不再作更多讨论。就数据误差单一干扰源而言,由表1得知,即使采用一定阶数的截断核函数,要想获得优于1 cm精度的高程异常解算结果,重力异常观测随机噪声也须控制在5 mGal甚至3 mGal以内。

下面进一步讨论球面重力异常系统性偏差对高程异常计算精度的影响,假设网格平均重力异常存在大小为$\delta\Delta g$的系统性偏差,则依据式(34)和式(35),该误差引起两种形式的高程异常计算偏差$\Delta\zeta_{\psi_0}^{(1)}$、$\Delta\zeta_{\psi_0}^{(2)}$分别为:

$$\Delta\zeta_{\psi_0}^{(1)}=\frac{R}{4\pi\gamma}(\delta\Delta g)\sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{M_2}S(r_p,\psi_{pij})\Delta\sigma_{ij} \quad (38)$$

$$\Delta\zeta_{\psi_0}^{(2)}=\frac{R}{4\pi\gamma}(\delta\Delta g)\sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{M_2}S^{\mathrm{WG}}(r_p,\psi_{pij})\Delta\sigma_{ij} \quad (39)$$

仍采用前面测试随机噪声影响相同的计算点坐标、数据覆盖范围和分辨率参数,分别取$\delta\Delta g$=0.1 mGal、0.5 mGal、1 mGal,按式(38)和式(39)依次计算$\Delta\zeta_{\psi_0}^{(1)}$和$\Delta\zeta_{\psi_0}^{(2)}$,具体数值结果见表2,表中同样给出了核函数截断阶数分别取为N=36和N=360时的$\Delta\zeta_{\psi_0}^{(2)}$计算结果,分别记为$\Delta\zeta_{\psi_0}^{(2\text{-}1)}$和$\Delta\zeta_{\psi_0}^{(2\text{-}2)}$。

由表2估算结果可以看出,重力异常观测系统性偏差对高程异常计算精度的影响极为显著,其影响量值要比随机噪声干扰大得多,0.1 mGal系统偏差干扰影响量甚至比5 mGal的随机噪声影响量还要大许多。值得注意的是,由局部积分特性反映出来的这种现象与高程异常全球积分计算模型的性质完全不相同,因为

表 2　重力异常系统性偏差对高程异常计算精度的影响/cm

Table 2　Effect of Systematic Gravity Anomaly Bias on Height Anomaly Accuracy/cm

计算高度/km	$\Delta\zeta_{\psi_0}^{(1)}$			$\Delta\zeta_{\psi_0}^{(2\text{-}1)}$			$\Delta\zeta_{\psi_0}^{(2\text{-}2)}$		
	$\delta\Delta g=$ 0.1 mGal	$\delta\Delta g=$ 0.5 mGal	$\delta\Delta g=$ 1 mGal	$\delta\Delta g=$ 0.1 mGal	$\delta\Delta g=$ 0.5 mGal	$\delta\Delta g=$ 1 mGal	$\delta\Delta g=$ 0.1 mGal	$\delta\Delta g=$ 0.5 mGal	$\delta\Delta g=$ 1 mGal
0	27.23	136.10	272.20	0.10	0.50	1.00	−0.01	−0.04	−0.09
0.01	27.23	136.10	272.20	0.10	0.50	1.00	−0.01	−0.04	−0.09
0.05	27.23	136.10	272.20	0.10	0.50	1.00	−0.01	−0.04	−0.08
0.1	27.23	136.10	272.20	0.10	0.50	1.01	−0.01	−0.04	−0.08
0.3	27.23	136.10	272.30	0.10	0.51	1.02	−0.01	−0.03	−0.06
1	27.22	136.10	272.20	0.11	0.53	1.06	0.00	−0.01	−0.02
3	27.21	136.00	272.10	0.11	0.54	1.07	0.00	0.00	0.00
5	27.19	135.90	272.90	0.11	0.53	1.06	0.00	0.00	0.00
10	27.15	135.70	272.50	0.10	0.51	1.03	0.00	0.00	0.00

$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}S(r,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\alpha=0$,故数据观测系统性偏差对全球积分模型计算结果没有任何影响,也就是等于零,这是由地球平均椭球定义要求重力异常和高程异常都不包含零阶谐函数项所决定的[7]。而对于局部积分,重力异常和高程异常显然不受上述条件的约束,系统误差影响特性也就发生了根本性变化。表2对比计算结果同时说明,核函数改化对减弱数据观测系统偏差影响作用显著,经截断后的核函数具有非常高效的高通滤波作用,有效抑制了低频系统偏差信号对高程异常计算结果的干扰。表1和表2的计算结果表明,相比较而言,减小数据观测系统性干扰因素的影响更有利于提高高程异常的计算精度,核函数改化对抑制数据观测系统性偏差和随机噪声干扰都具有显著作用。

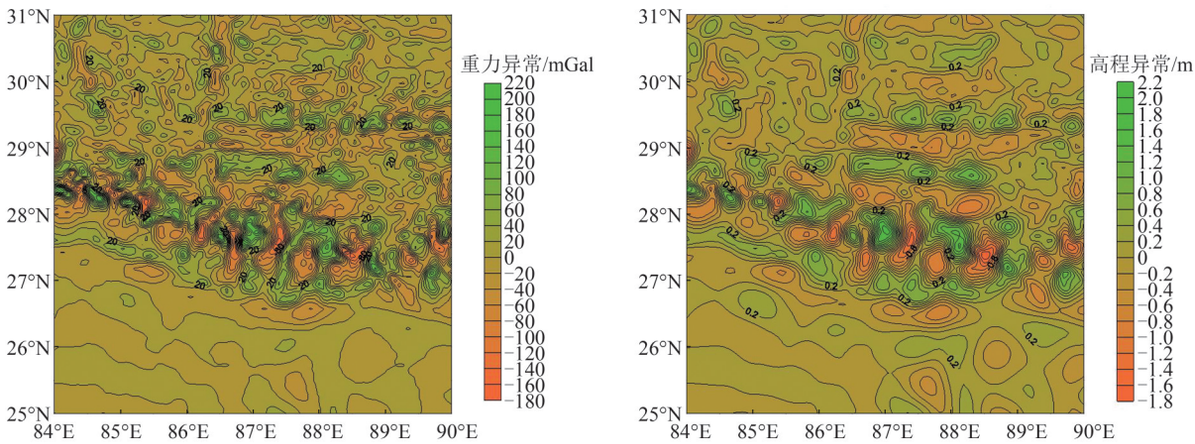
3　数值计算验证与分析

为了验证前述各改化模型的有效性,选取重力异常场变化极为剧烈的珠穆朗玛峰山区作为实验区,具体覆盖范围为:6°×6°(φ为25°N～31°N;λ为84°E～90°E)。首先选取截断到360阶次的位模型EGM2008作为参考场,即取N=360,然后选取361～2 160阶次的截断位模型EGM2008作为计算检验的标准场,即取L=2 160,使用与式(32)相类同的模型计算球面上的重力异常"真值"(Δg_t),进而选取$r_i=R+h_i$,R=6 371 km,使用上述同样的截断位模型,依据与式(33)相类同的模型分别计算对应于9个高度面上的2′×2′网格高程异常理论"真值"(ζ_{ti}),9个计算高度分别取为0 km、0.01 km、0.05 km、0.1 km、0.3 km、1 km、3 km、5 km、10 km,计算点坐标与数据网格点重合,每一个高度面对应180×180=32 400个计算点。表3列出了由EGM2008位模型计算得到的零高度面上的网格重力异常和高程异常统计结果。图1(a)、1(b)分别为361～2 160阶次EGM2008位模型计算得到的零高度面上的重力异常和高程异常分布图。

表 3　利用位模型 EGM2008 计算零高度面网格重力异常和高程异常统计

Table 3　Statistics of Computed Gravity Anomalies and Height Anomalies Using the Geopotential Model EGM2008 at Zero-Height Surface

统计项	阶次/阶	最小值	最大值	平均值	标准差	均方根误差
重力异常/mGal	2～2 160	−187.99	429.02	10.55	104.23	104.76
	2～360	−197.98	294.72	10.76	98.77	99.35
	361～2 160	−166.17	189.95	−0.21	33.12	33.12
高程异常/m	2～2 160	−66.82	−23.17	−39.77	14.74	42.41
	2～360	−66.82	−23.45	−39.77	14.74	42.41
	361～2 160	−1.80	1.95	−0.00	0.35	0.35



(a) 重力异常 (b) 高程异常

图1 零高度面361～2 160阶次EGM2008位模型重力异常和高程异常

Fig. 1 Gravity Anomalies and Height Anomalies the Geopotential Model EGM2008 Degree 361-2 160 at Zero-Height Surface

为了对比分析不同改化模型的计算效果,采用零高度面也就是球面上的2′×2′网格重力异常“真值”Δg_i作为观测量,同时使用3种改化模型对实验区9个高度面上的2′×2′网格高程异常进行计算分析。其中,第1模型是指使用经过实用性改化后的高程异常通式进行数值计算时,对所有计算高度都剔除了与计算点重合的中心数据网格影响;第2模型是指对应于式(30)的改化模型,此模型在所有高度段都按照式(25)计算中心数据网格对高程异常的贡献;第3模型是指对应于式(31)的改化模型,此模型在所有高度段都按照式(27)计算积分域数据对高程异常的贡献。

将3种改化模型的计算值分别与相对应高度的高程异常理论“真值”ζ_{ti}作比较,可获得不同改化模型的计算精度评估信息,具体比对结果列于表4。这里积分半径统一取为$\psi_0=2°$,考虑到积分边缘效应影响,表4只列出了实验中心区2°×2°范围内的数据比对结果。

表4 由不同改化模型计算得到的球外部高程异常与“真值”比较/cm

Table 4 Comparison of External Height Anomalies Calculated by Different Refined Models with the “True Value”/cm

模型	统计值	计算高度/km								
		0	0.01	0.05	0.1	0.3	1	3	5	10
第1模型	最大值	10.71	10.69	10.51	10.10	10.61	8.83	6.12	4.35	2.05
	最小值	−9.00	−8.98	−8.82	−8.48	−8.91	−7.40	−5.10	−3.60	−1.68
	平均值	−0.08	−0.08	−0.08	−0.08	−0.08	−0.07	−0.05	−0.03	−0.02
	均方根误差	3.01	3.00	2.95	2.84	2.98	2.48	1.71	1.22	0.57
第2模型	最大值	6.32	6.25	5.66	4.47	5.99	1.43	1.97	2.27	1.59
	最小值	−7.14	−7.06	−6.38	−5.00	−6.75	−1.48	−1.53	−1.81	−1.28
	平均值	0.04	0.04	0.04	0.03	0.04	0.01	−0.02	−0.02	−0.01
	均方根误差	2.06	2.04	1.85	1.45	1.95	0.45	0.54	0.63	0.44
第3模型	最大值	0.29	0.29	0.29	0.30	0.29	0.30	0.30	0.29	0.23
	最小值	−0.35	−0.35	−0.35	−0.36	−0.35	−0.37	−0.36	−0.34	−0.27
	平均值	−0.01	−0.01	−0.01	−0.01	−0.01	−0.01	−0.01	−0.01	−0.01
	均方根误差	0.10	0.10	0.10	0.09	0.10	0.09	0.09	0.08	0.06

从表4统计结果可以看出,第1模型在所有计算高度上都剔除了与计算点重合的中心数据网格影响,虽然成功避开了积分奇异性问题,但由此也带来了不可忽略的计算误差,相对应的均方根误差最大值达到3.01 cm。第2模型是本文推出的简化版去积分奇异性改化模型,相比第1模型,第2模型的计算精度已经得到大幅提升,超低空高度段计算精度的提升幅度尤为明显,最大均方根误差从3.01 cm减少到2.06 cm,精度提升幅度超过30%。如前所述,该改化模型精度的改善

幅度随计算高度增高而略有减少,是积分核函数平面近似误差增大所致,此时如果采用分段改变计算模型策略,即比如在$h\geqslant 1$ km高度段,让第2模型回归原始模型(因为此时不再需要作积分奇异性改化处理),那么,结合高度$h<1$ km的第2模型计算结果和$h\geqslant 1$ km的原始模型计算结果,就能获得全高度段稳定可靠的球外部高程异常计算结果。第3模型是本文推出的严密版去积分奇异性改化模型,在所有高度段上都取得了超预期的高符合度计算结果,最大模型误差不超过0.5 cm,是3个对比计算模型中的最优改化模型,且全高度段不需要改变计算策略。相比第2模型,第3模型的优势主要体现在:(1)不仅消除了中心数据网格积分奇异性对计算结果的影响,同时减弱了计算点周围近邻数据网格积分奇异性对计算结果的影响;(2)通过式(31)右端积分中的$(\Delta g-\Delta g_p)$差分运算,成功消除了网格数据内含的具有系统误差特性的代表误差影响,此处的代表误差由积分离散化过程引起,重力异常场变化越是剧烈的地区,此类代表误差就越大,第3模型的改化效果也就体现得越明显。由此可见,如果不考虑模型的复杂度,那么,第3模型应当是球外部高程异常精密稳定计算的首选模型。不难理解,计算区域的地形和重力异常变化越剧烈,就越能凸显前述计算模型奇异性处理和模型改化的提升效能。为了比较,在海洋和陆地平缓区域也开展了类似的数值计算验证,与珠峰山区验证结果相比,3个模型在平缓区域的验证符合度(绝对计算精度)都更高,但第2和第3模型相对于第1模型精度改善的相对幅度与珠峰山区验证结果基本一致,完全符合理论上的估计预期。考虑到论文篇幅的限制,不再列出具体比对结果。

在前面作为观测量的截断位模型重力异常"真值"Δg_t中分别加入两类误差干扰,一类是单纯的± 3 mGal随机噪声,另一类为± 3 mGal随机噪声加上0.5 mGal系统偏差,形成两组新的模拟观测量,按照前面相同的计算方案和流程,依次采用前述3种改化模型完成9个高度面上的$2'\times 2'$网格球外部高程异常计算,将计算结果与相对应高度的截断位模型"真值"作对比评估,具体比对结果如表5和表6所示。

表5　第1类误差干扰下的不同改化模型计算结果与"真值"比较/cm

Table 5　Comparison of the Results Derived from Different Refined Models Under Type 1 Data Error Influence with the "True Value"/cm

模型	统计值	计算高度/km								
		0	0.01	0.05	0.1	0.3	1	3	5	10
第1模型	最大值	11.81	11.78	11.69	11.58	11.14	9.76	6.81	4.87	2.34
	最小值	−10.07	−10.05	−9.97	−9.87	−9.50	−8.31	−5.78	−4.12	−1.97
	平均值	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	−0.04	−0.02	−0.01	0.00
	均方根误差	3.11	3.10	3.08	3.05	2.93	2.57	1.79	1.28	0.62
第2模型	最大值	5.86	5.80	5.58	5.30	4.27	1.75	2.70	2.81	1.88
	最小值	−7.22	−7.14	−6.84	−6.48	−5.22	−1.98	−2.31	−2.38	−1.58
	平均值	0.07	0.07	0.06	0.06	0.05	0.03	0.00	0.00	0.00
	均方根误差	2.09	2.06	1.98	1.87	1.49	0.62	0.68	0.72	0.49
第3模型	最大值	1.51	1.51	1.50	1.49	1.44	1.30	0.99	0.77	0.44
	最小值	−1.72	−1.72	−1.70	−1.69	−1.64	−1.47	−1.10	−0.85	−0.49
	平均值	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01
	均方根误差	0.56	0.56	0.55	0.55	0.53	0.48	0.36	0.28	0.17

对比表4与表5、表6的计算结果可以看出,在观测"真值"中分别加入两类不同特性的误差干扰后,3种高程异常改化模型的计算精度虽然都发生了一定变动,但其变化幅度几乎可以忽略不计,说明两类误差对高程异常计算结果的影响很微弱。这样的结果与§2所作的数据观测误差影响理论分析结论及表1和表2数值估算结果完全相吻合,这主要源于表4~6设计的实验均采用了360阶次的位模型参考场和相同阶次的截断核函数,从而再次证明核函数截断改化对抑制数据观测系统性偏差和随机噪声干扰均具有显著作用,要想取得1 cm的高程异常计算模型符合度,对积分核函数进行截断改化处理是必不可少的关键技术环节。

表6 第2类误差干扰下的不同改化模型计算结果与"真值"比较/cm

Table 6 Comparison of the Results Derived from Different Refined Models Under Type 2 Data Error Influence with the "True Value"/cm

模型	统计值	计算高度/km								
		0	0.01	0.05	0.1	0.3	1	3	5	10
第1模型	最大值	11.20	11.18	11.09	10.97	10.54	9.16	6.25	4.36	2.00
	最小值	−9.06	−9.04	−8.97	−8.88	−8.53	−7.44	−5.12	−3.69	−1.81
	平均值	−0.17	−0.17	−0.17	−0.17	−0.17	−0.16	−0.13	−0.12	−0.08
	均方根误差	3.05	3.04	3.02	2.99	2.88	2.52	1.75	1.25	0.60
第2模型	最大值	6.46	6.39	6.14	5.83	4.68	2.17	1.95	2.20	1.53
	最小值	−7.34	−7.26	−6.95	−6.57	−5.17	−1.99	−1.88	−2.07	−1.45
	平均值	−0.08	−0.08	−0.09	−0.09	−0.09	−0.11	−0.11	−0.11	−0.08
	均方根误差	2.15	2.13	2.04	1.94	1.55	0.65	0.64	0.69	0.48
第3模型	最大值	1.74	1.74	1.73	1.71	1.66	1.50	1.13	0.88	0.52
	最小值	−1.87	−1.86	−1.85	−1.83	−1.77	−1.57	−1.13	−0.83	−0.52
	平均值	−0.12	−0.12	−0.12	−0.12	−0.12	−0.12	−0.11	−0.10	−0.07
	均方根误差	0.55	0.55	0.55	0.54	0.53	0.48	0.37	0.29	0.18

4 结 语

利用位场等效源原理求解地面大地边值问题,最终都要归结为含地心向径因子核函数的球外部扰动位泛函全球积分模型解算问题。针对此类积分计算模型在超低空高度段可能存在的核函数奇异性问题,本文分别提出了基于中心网格数据区块分离法和基于计算点网格数据移去-恢复法的两种去除积分核函数奇异性解决方案:前者对核函数做了舍弃次项保留主项处理,同时对积分域做了平面近似,计算过程比较简单;后者采用基于恒等式的移去-恢复运算,确保转换过程不损失计算精度。相比较而言,后者比前者具有更高的理论上的严密性,数值计算检验结果也证明了这一点。同时本文还提出了球外部高程异常全球积分模型向局域数值积分模型转换的实用性改化方案,分别给出了与局部积分模型相对应的远区效应、移去-恢复参考场和核函数截断改化计算表达式;分析研究了数据观测误差对高程异常计算结果的影响特性及制衡关系,确认减小数据观测系统性偏差和采取核函数截断改化措施,是提高球外部高程异常计算精度的关键。利用超高阶位模型EGM2008对核函数奇异性解决方案和计算模型实用性改化方案进行了数值计算验证,证实采用本文方案计算球外部高程异常,可取得优于1cm的模型内符合精度,可满足当今高精度高分辨率高程异常数值模型构建及相关应用领域需求[21-22]。

参 考 文 献

[1] Molodensky M S, Eremeev V F, Yurkina M I. Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth[M]. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1962.

[2] MORITZ H. Advanced Physical Geodesy [M]. Karlsruhe: Wichmann, 1980.

[3] 安艳辉. 区域似大地水准面再精化精度影响因素分析[J]. 测绘地理信息, 2020, 45(4): 75-78.
AN Yanhui. Analysis of Influencing Factors on the Precision of Regional Quasi-Geoid Re-refinement [J]. *Journal of Geomatics*, 2020, 45(4): 75-78.

[4] 李建成. 我国现代高程测定关键技术若干问题的研究及进展[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2007, 32(11): 980-987.
LI Jiancheng. Study and Progress in Theories and Crucial Techniques of Modern Height Measurement in China[J]. *Geomatics and Information Science of Wunan University*, 2007, 32(11): 980-987.

[5] 李建成, 陈俊勇, 宁津生, 等. 地球重力场逼近理论与中国2000似大地水准面的确定[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2003.
LI Jiancheng, CHEN Junyong, NING Jinsheng. Approximation Theory of Earth Gravity Field and Determination of China 2000 Quasi-Geoid [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2003.

[6] 常梦雅, 梁金成. 小区域高程异常模型构建方法[J]. 北京测绘, 2022, 36(12): 1722-1726.
CHANG Mengya, LIANG Jincheng. Construction Method of Height Anomaly Model in Subregion[J].

Beijing Surveying and Mapping, 2022, 36(12): 1722-1726.

[7] HEISKANEN W A, MORITZ H. Physical Geodesy[M]. San Francisco: W. H. Freeman, 1967.

[8] 黄谟涛, 邓凯亮, 刘敏, 等. 基于Molodensky边值理论的似大地水准面计算模型改化及分析检验[J]. 海洋测绘, 2020, 40(4): 1-8.
HUANG Motao, DENG Kailiang, LIU Min, et al. Modification and Test of the Model for Computing Quasi-Geoid Based on the Molodensky Boundary-Value Theory [J]. *Hydrographic Surveying and Charting*, 2020, 40(4): 1-8.

[9] BJERHAMMAR A. A New Theory of Geodetic Gravity[M]. Stockholm: Tekniska Hogskolan, 1964.

[10] VANÍČEK P, HUANG J, NOVÁK P, et al. Determination of the Boundary Values for the Stokes-Helmert Problem[J]. *Journal of Geodesy*, 1999, 73(4): 180-192.

[11] WANG Y M, SALEH J, LI X, et al. The US Gravimetric Geoid of 2009 (USGG2009): Model Development and Evaluation[J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86(3): 165-180.

[12] 李德强. 利用改进的Stokes-Helmert边值理论解算高精度似大地水准面[J]. 测绘通报, 2017(8): 13-18.
LI Deqiang. High Precision Quasi-Geoid Computations Using Improved Stokes-Helmert Boundary Value Problem[J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 2017(8): 13-18.

[13] 黄谟涛, 刘敏, 马越原, 等. 海域超大范围外部重力场快速赋值模型构建[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2018, 43(5): 643-650.
HUANG Motao, LIU Min, MA Yueyuan, et al. Model Construction for Computing External Gravity Field in Ultra-Large Sea Area[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2018, 43(5): 643-650.

[14] 黄谟涛, 刘敏, 邓凯亮, 等. 海域流动点外部扰动引力无奇异计算模型[J]. 地球物理学报, 2019, 62(7): 2394-2404.
HUANG Motao, LIU Min, DENG Kailiang, et al. A Nonsingular Model for Computing the External Gravity Field at a Mobile Point in a Sea Area[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2019, 62(7): 2394-2404.

[15] 关怀魁, 肖云, 任飞龙, 等. 重力场频率域延拓方法分析及误差因素研究[J]. 大地测量与地球动力学, 2026, 46(2): 244-255.
GUAN Huaikui, XIAO Yun, REN Feilong, et al. Gravity Frequency Domain Continuation Methods and Error Factors[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2026, 46(2): 244-255.

[16] 黄谟涛, 翟国君, 管铮, 等. 海洋重力场测定及其应用[M]. 北京: 测绘出版社, 2005.
HUANG Motao, ZHAI Guojun, GUAN Zheng, et al. The Determination and Application of Marine Gravity Field[M]. Beijing: Surveying and Mapping Press, 2005.

[17] 黄谟涛, 邓凯亮, 陈欣, 等. 基于Stokes-Helmert边值理论的大地水准面计算模型改化及分析检验[J]. 海洋测绘, 2020, 40(5): 1-8.
HUANG Motao, DENG Kailiang, CHEN Xin, et al. Modification and Test of the Model for Computing Geoid Based on the Stokes-Helmert Boundary-Value Theory [J]. *Hydrographic Surveying and Charting*, 2020, 40(5): 1-8.

[18] 张国钰. 基于修正Stokes和Hotine公式的吉林省似大地水准面精化[D]. 长春: 吉林大学, 2023.
ZHANG Guoyu. Quasi-Geoid Refinement Based on Modified Stokes and Hotine Formulas in Jilin Province[D]. Changchun: Jilin University, 2023.

[19] WONG L, GORE R. Accuracy of Geoid Heights from Modified Stokes Kernels[J]. *Geophysical Journal International*, 1969, 18(1): 81-91.

[20] 黄谟涛, 邓凯亮, 欧阳永忠, 等. 海空重力测量理论方法及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2024.
HUANG Motao, DENG Kailiang, OUYANG Yongzhong, et al. Theoretical Method and Application of Sea-Air Gravity Measurement[M]. Beijing: Science Press, 2024.

[21] 黄谟涛, 邓凯亮, 欧阳永忠, 等. 海空重力测量及应用技术研究若干进展[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2022, 47(10): 1635-1650.
HUANG Motao, DENG Kailiang, OUYANG Yongzhong, et al. Development and Study in Marine and Airborne Gravimetry and Its Application [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(10): 1635-1650.

[22] 黄谟涛, 欧阳永忠, 边少锋, 等. 美俄水下重力辅助惯性导航技术发展分析与思考[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2024, 49(11): 1977-1991.
HUANG Motao, OUYANG Yongzhong, BIAN Shaofeng, et al. Analysis and Reflections on the Development of Underwater Gravity-Aided Inertial Navigation Technology in the United States and Russia[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2024, 49(11): 1977-1991.